

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ GIURGIU – 11 februarie 2023

CLASA a VII-a

1. a) Demonstrați că:

$$\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{k}{2k-1} + \frac{k}{2k+1} \right), \text{ pentru orice număr natural nenul } k.$$

b) Fie $x = \frac{2^2}{1 \cdot 3} + \frac{4^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{2022^2}{2021 \cdot 2023}$. Să se arate că $1011 < x < 1011,5$.2. Se consideră $x_n = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n \cdot (n+1)}}$, unde n este număr natural nenul.a) Arătați că pentru orice n număr natural nenul $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n \cdot (n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$;b) Aflați câte numere naturale nenule $n \leq 2023$ există, astfel încât x_n să fie număr rațional.3. În pătratul $ABCD$ cu latura de lungime a , $a > 0$, M și N sunt mijloacele laturilor AB și BC .a) Calculați aria triunghiului DMN în funcție de a .b) Dacă $DN \cap AC = \{P\}$, exprimați aria triunghiului DCP în funcție de a .4. În paralelogramul $ABCD$ se dă $E \in (BD)$, astfel încât $EB = 2ED$.a) Arătați că E este centrul de greutate al triunghiului ACD .b) Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, $AE \cap BC = \{F\}$ și $DC \cap OF = \{G\}$,aflați valoarea raportului $\frac{OG}{OF}$.*Timp de lucru 3 ore.**Fiecare problema este notata cu 7 puncte*